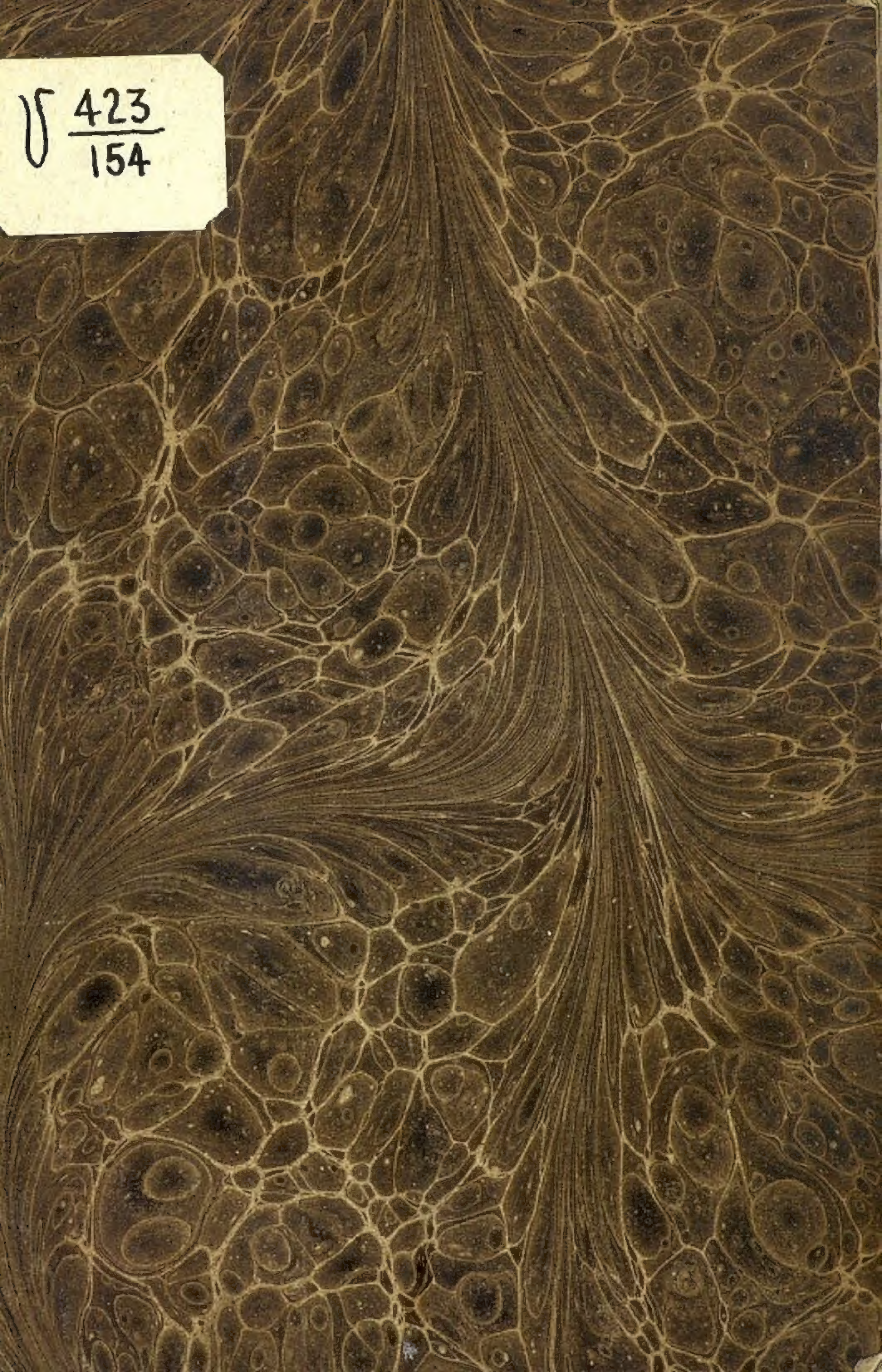



423
154

ИЗСЛѢДОВАНІЕ

О

ПРОГРЕССИКѢ

Штаба Черноморскаго Флота и Портовъ

Астрономомъ Кнорре.



НИКОЛАЕВЪ.

Въ типографіи Гидрографическаго Черноморскаго Депо.

1838.

Съ дозволенія начальства.



ИЗСЛѢДОВАНІЕ О ПРОГРЕССИКѢ.

1.

Ученый Комитетъ Морскаго Министерства издалъ въ 1837 году книгу подъ заглавіемъ „Аналитическое изслѣдованіе о кривой линіи, *Прогрессикѣ,* употребляемой въ корабельной Архитектурѣ", сочиненную Корпуса Корабельныхъ Инженеровъ Полковникомъ Поповымъ. Хотя изъ этого изслѣдованія не ясно еще видно, какимъ образомъ употреблять упомянутую кривую при составленіи корабельныхъ чертежей, однако нѣтъ сомнѣнія, что столь заслуженный Инженеръ не принялъ бы на себя труда войти во всѣ подробности прогрессики, и вычислить обширную таблицу ея экспонентовъ, еслибъ онъ не увѣрился на дѣлѣ въ практической ея пользѣ. И потому надѣясь, что Г. Поповъ сдержитъ обѣщаніе свое изданіемъ особаго сочиненія о приложеніи прогрессики къ Корабельной Архитектурѣ, я между тѣмъ занялся, полагаю, полезнымъ дѣломъ, приведя свойства этой кривой къ простѣйшимъ выраженіямъ и строеніямъ, тѣмъ болѣе, что многіе выводы Г. Попова такъ многосложны, что для Инженеровъ, не слишкомъ привыкшихъ къ вышнимъ вычисленіямъ, будутъ

крайне затруднительны и чрезъ это можетъ замедлится введеніе математической точности въ кораблестроеніе. Трудъ Г. Попова заслуживаетъ полную благодарность, хотя бы онъ имѣлъ и нѣкоторые недостатки. Впрочемъ я приложилъ все стараніе, чтобы разсужденіе мое не приняло вида критики.—Науки получилибъ большую отъ оной пользу, еслибъ ученые взамѣнъ найденныхъ въ критикуемыхъ сочиненіяхъ недостатковъ, предлагали бы средства къ ихъ исправленію. Внимательный читатель, сравнивая мою статью съ сочиненіемъ Г. Попова, самъ найдетъ, въ чемъ они разнствуютъ и увидитъ доводы, которые привели меня къ другимъ заключеніямъ. Для облегченія этихъ сравненій я употреблялъ въ выводахъ вездѣ, гдѣ только было можно, тѣ же самыя буквы, которыя ввелъ Г. Поповъ.

2.

Прогрессика есть одна изъ простѣйшихъ кривыхъ третей степени. Изъ разныхъ видовъ, которые можетъ принять уравненіе ея, нижеслѣдующій кажется для нашей цѣли удобнѣйшимъ:

$$(n-1)xy^2+ay^2=b^2nx.$$

Это уравненіе относится къ ортогональнымъ координатамъ. Число постоянныхъ сомножителей, входящихъ

въ него, можно бы уменьшить однимъ, раздѣливъ обѣ части на любаго изъ нихъ, напр. на $n-1$, чѣмъ оно приняло бы видъ

$$xy^2+\frac{a}{n-1}y^2=\frac{b^2n}{n-1}x,$$

и означивъ каждаго изъ сомножителей $\frac{a}{n-1}$ и $\frac{b^2n}{n-1}$ одною только буквою; но мы будемъ употреблять это сокращеніе только тамъ, гдѣ оно принесетъ существенную пользу.

Изъ прежде принятаго уравненія выводится формула

$$y^2=\frac{b^2nx}{a+(n-1)x},$$

которая показываетъ, что каждой абциссѣ x соотвѣтствуютъ двѣ равныя ординаты y съ противными знаками, то есть: что кривая расположена симметрически по обѣимъ сторонамъ оси абциссъ. Полагая $x=o$, выходитъ также $y=o$, слѣдовательно кривая проходитъ чрезъ начало координатъ; полагая же $x=a$, выходитъ $y=b$; откуда заключить должно, что постоянныя a и b суть пара данныхъ координатъ. При весьма малыхъ абциссахъ членъ $(n-1)x$ въ знаменателѣ ничтоженъ въ сравненіи съ a, почему въ такомъ случаѣ безъ чувствительной погрѣшности будетъ

$$y^2=\frac{b^2nx}{a};$$

слѣдовательно около начала координатъ прогрессика сливается съ коническою параболою, имѣющею параметръ $\frac{b^2 n}{a}$, и потому эта точка будетъ вершиною.

3.

Что же касается до постояннаго n, которое Г. Поповъ назвалъ *Экспонентомъ*, то оно тѣсно сопряжено съ натурою кривой. Прогрессики, у коихъ n находится между нулемъ и 1, во всѣхъ свойствахъ такъ много разнствуютъ съ тѣми, у коихъ оно падаетъ внѣ этихъ предѣловъ, что Г. Поповъ счелъ нужнымъ дать имъ разныя имена. Онъ называетъ послѣднія *прогрессиками параболическими*, а первыя *прогрессиками конхоидальными*. Впрочемъ не должно думать, чтобы n имѣло всегда постоянную величину для той же кривой, какая бы пара координатъ не принималась для a и b; напротивъ того, между a, b и n существуетъ такая зависимость, что всякой новой парѣ координатъ соотвѣтствуетъ и новое n въ той же кривой. Чтобы выразить эту зависимость, примемъ вмѣсто a и b координаты α и β, и назовемъ ν экспонентъ, соотвѣтствующій этому положенію, то уравненія

$$xy^2 + \frac{\alpha}{\nu-1}y^2 = \frac{\beta^2\nu}{\nu-1}x$$

$$\text{и } xy^2 + \frac{a}{n-1}y^2 = \frac{b^2 n}{n-1}x$$

очевидно тогда только принадлежатъ той же кривой, когда

$$\frac{\alpha}{\nu-1}=\frac{a}{n-1} \text{ и } \frac{\beta^2\nu}{\nu-1}=\frac{b^2n}{n-1}.$$

Второе изъ этихъ уравненій даетъ

$$\frac{1}{\nu}=1+\frac{\beta^2}{b^2}\cdot\frac{1-n}{n}.$$

Приложимъ эту формулу прежде къ прогрессикамъ пораболическимъ, у коихъ по опредѣленію

$$\frac{1-n}{n}<0.$$

Замѣтимъ вообще, что абцисса никогда не сдѣлается мнимою, какая бы величина не принималась для ординаты; ибо въ уравненіе прогрессики входитъ только первая степень x; откуда сомножитель β^2 можетъ имѣть всѣ величины отъ нуля до безконечно великой. Назначая же ему послѣдовательно величины отъ нуля до $\frac{b^2n}{n-1}$, получимъ для $\frac{\beta^2}{b^2}\cdot\frac{1-n}{n}$ величины отъ нуля до -1, а для ν величины отъ 1 до безконечно великой; уменьшая же β^2 послѣдовательно отъ безконечно великой до $\frac{b^2n}{n-1}$, получимъ для ν всѣ отрицательныя величины отъ нуля до безконечно великой. Изъ этого разсужденія слѣдуетъ, что экспонентъ всякой прогрессики параболической можетъ получать всѣ возможныя величины лежащія внѣ предѣловъ 0 и 1, лишь бы коорди-

наты α и β были свойственно приняты. И потому, есл будетъ задана кривая съ отрицательнымъ n, то можн всегда преобразовать уравненіе ея такъ, чтобъ она пол чила положительное n превышающее 1; отчего можно п стоянно полагать въ прогрессикѣ параболической $n >$ не вредя всеобщности.

Въ прогрессикѣ же конходальной имѣемъ

$$\frac{1-n}{n} > o;$$

слѣдовательно, назначая количеству β^2 всѣ величины от нуля до безконечно великой, получимъ для $\frac{1}{\nu}$ всѣ возм жныя величины > 1; слѣдовательно ν можетъ получать д кривыхъ этого рода всѣ величины между нулемъ и 1, н никогда не выйдетъ изъ сихъ предѣловъ.

4.

Займемся теперь изслѣдованіемъ нѣкоторыхъ свойств прогрессики параболической. Всякая кривая трете степени имѣетъ или три азимптоты, или только одну Кривая этого чина, не имѣющая вовсе азимптоты, н существуетъ. Перемѣняя въ одно время знаки абцисс a и x, не производимъ никакой перемѣны въ уравненіи про грессики, почему можемъ полагать a всегда положитель нымъ; ибо всѣ заключенія, выведенныя при этомъ предполо женіи, простираются также и для отрицательнаго a, лиш

бы абциссы были считаемы въ противную сторону. Что же касается до ординаты b, то только квадратъ ея входитъ въ уравненіе, а потому все равно, считать ли ее положительною или отрицательною. Разсматривая же формулу

$$y^2 = \frac{b^2 n}{\frac{a}{x} + n - 1},$$

легко увѣриться можно, что для всѣхъ положительныхъ величинъ абциссы, будетъ также $y^2 > o$; поелику же знаменатель $\frac{a}{x} + n - 1$ дѣлается тѣмъ меньше чѣмъ больше x, то y^2 безпрерывно увеличивается при возрастающемъ x, но съ быстротою тѣмъ меньшею, чѣмъ больше x; наконецъ, когда x дѣлается весьма великимъ, то y^2 получаетъ постоянную величину $\frac{b^2 n}{n-1}$. Слѣдовательно кривая имѣетъ двѣ азимптоты параллельныя оси и удаленныя отъ нее по обѣ стороны на разстояніе $b\sqrt{\frac{n}{n-1}}$. Когда же $x < o$, то будетъ также $y^2 < o$, доколѣ x находится между нулемъ и $-\frac{a}{n-1}$; слѣдовательно въ этомъ пространствѣ кривая пресѣкается. Но когда $x = -\frac{a}{n-1}$, тогда ордината дѣлается безконечно великою; слѣдовательно третяя азимптота пересѣкаетъ ось подъ прямымъ угломъ въ разстояніи

$-\frac{a}{n-1}$ отъ начала. Когда наконецъ $x < -\frac{a}{n-1}$, то y^2, оставаясь всегда положительнымъ, уменьшается постепенно до предѣла $\frac{b^2 n}{n-1}$. Изъ этого разсужденія легко видѣть можно, что прогрессика параболическая имѣетъ три вѣтви, изображенныя въ чертежѣ 1-мъ, гдѣ Bx означаетъ ось абциссъ, считаемыхъ отъ A къ x; EF, GH и JK азимптоты расположенныя такъ, что

$$AB = \frac{a}{n-1} \quad \text{и} \quad BC = BD = b\sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

а FAH, ELJ и GMK вѣтви кривой.

5.

Когда $n=1$, то первый членъ въ уравненіи

$$(n-1)xy^2 + ay^2 = b^2 nx$$

уничтожается, и кривая дѣлается коническою параболою, которую можно считать переходомъ изъ прогрессики параболической въ конхоидальную. Свойства параболы такъ извѣстны, что этотъ случай не требуетъ дальнѣйшаго объясненія, почему приступимъ къ изслѣдованію прогрессики конхоидальной, у которой n находится между 1 и нулемъ. Когда увеличиваемъ x постепенно, начиная отъ нуля, то квадратъ ординаты быстро растетъ, такъ, что онъ уже дѣлается безконечно великимъ, когда

$$x = \frac{a}{1-n};$$

слѣдовательно кривая имѣетъ азимптоту, пересѣкающую ось абциссъ подъ прямымъ угломъ въ разстояніи $\frac{a}{1-n}$ отъ начала. Но когда

$$x > \frac{a}{1-n} \text{ или когда } x < 0,$$

то выходитъ всегда $y^2 < 0$, откуда заключить должно, что вся кривая занимаетъ только пространство отъ $x=0$ до $x=\frac{a}{1-n}$, и что она не имѣетъ ни другихъ вѣтвей, ни азимптотъ. Чертежъ 2 изображаетъ такую кривую JAK съ ея азимптотою JK, находящеюся отъ начала въ разстояніи $AB=\frac{a}{1-n}$.

6.

Для начертанія прогрессики можно, принявъ достаточное число ординатъ по произволу, вычислить соотвѣтствующія имъ абциссы по формулѣ

$$x=\frac{ay^2}{b^2n+(1-n)y^2}.$$

Эту формулу можно приспособить къ вычисленію логарифмами, полагая для прогрессики параболической

$$\frac{y}{b}\sqrt{\frac{n-1}{n}}=\cos\varphi; \text{ тогда } x=\frac{a.\cot^2\varphi}{n-1}.$$

Впрочемъ формула $\frac{y}{b}\sqrt{\frac{n-1}{n}}=\cos.\varphi$ тогда только даетъ

дѣйствительныя величины для φ, когда $y < b\sqrt{\frac{n}{n-1}}$: поче-

му для тѣхъ вѣтвей кривой, гдѣ $y > b\sqrt{\frac{n}{n-1}}$, сдѣлаемъ

$\frac{b}{y}\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \cos. T$; тогда найдется $x = -\frac{a}{(n-1)\sin^2 T}$.

Для прогрессики же конхоидальной, полагая

$$\frac{b}{y}\sqrt{\frac{n}{1-n}} = \cot \psi, \text{ будетъ } x = \frac{a \sin^2 \psi}{1-n}.$$

Въ этомъ видѣ формулы такъ удобны, что я предпочелъ бы вычисленіе всякому графическому способу. По моему мнѣнію, одно изъ главныхъ преимуществъ образованія корпуса судовъ на математическихъ основаніяхъ состоитъ въ томъ, что вычисленіемъ можно находить для лекаловъ размѣренія, во всей точности соотвѣтствующія назначенной кривой поверхности, не прибѣгая никогда къ чертежу; а этого преимущества мы совершенно лишимся, ежели по прежнему будемъ опредѣлять размѣренія шпангоутовъ съемкою ординатъ съ чертежа, въ особенности когда онѣ опредѣлены геометрическими строеніями, подверженными въ практикѣ всѣмъ невѣрностямъ черченія. Впрочемъ желая доставить корабельнымъ Инженерамъ всѣ способы выбирать по собственному усмотрѣнію между черченіемъ и вычисленіемъ, я буду вездѣ, гдѣ задачи мо-

гутъ быть рѣшены геометріею, излагать, кромѣ аналитическихъ способовъ, и строенія.

7.

Теорема. Да будутъ a и x двѣ абциссы, а b и y соотвѣтствующія имъ ординаты какой либо прогрессики. На прямой AB (чертежъ 3) возьмемъ точку G, такъ чтобъ было

$$AB : AG = b^2 : y^2,$$

потомъ изъ точки C, принятой по произволу внѣ линіи AB, проведемъ чрезъ B и G прямыя CE и CM, сдѣлаемъ $CE = n . CB$, гдѣ n означаетъ экспонентъ прогрессики, и соединимъ точки A и E прямою AE, то говорю, что будетъ

$$AE : AM = a : x.$$

Доказательство. Проведя ED паралельно къ MC, будетъ

$$AG : BG = AG : AB - AG = y^2 : b^2 - y^2$$
$$BG : DG = CB : CE \qquad = 1 : n$$

$$AG : DG = AM : EM \qquad = y^2 : n(b^2 - y^2)$$
$$AE : AM = AM + EM : AM = y^2 + n(b^2 - y^2) : y^2;$$

но изъ формулы $x = \dfrac{ay^2}{b^2 n + (1-n) y^2}$ выходитъ

$$y^2 + n(b^2 - y^2) : y^2 = a : x,$$

слѣдовательно $AE : AM = a : x$.

Можно еще спросить, какимъ образомъ должно опредѣлить G такъ, чтобъ было

$$AB : AG = b^2 : y^2?$$

Къ тому Геометрія доставляетъ разные способы: можно между точкою A и произвольною линіею, проведенною чрез B, напр. CE, вмѣстить линіи AF и AH равныя b, чрез точки A, F и H провести кругъ, и взять $AJ = AK = y$ тогда JK пересѣчетъ AD въ G.

Для доказательства проведемъ діаметръ AL; тогда имѣемъ

$$AO : AL = AF^2 : AL^2$$
$$AL : AN = AL^2 : AJ^2$$

$$AO : AN = AF^2 : AJ^2 = b^2 : y^2$$

Но $AO : AN = AB : AG$

слѣдовательно $AB : AG = b^2 : y^2$.

8.

Предъидущая теорема доставляетъ легкій способъ для сысканія абциссъ, соотвѣтствующихъ любому числу ординатъ прогрессики, у коей даны a, b и n. Примемъ вершину въ a (чертежъ 4), и ось абциссъ по направленію ax. Проведемъ ay перпендикулярно къ ax; отъ точки a, положимъ разстояніе ab равное b и возьмемъ на ay достаточное число точекъ $g, g_{,}$ и пр. Чрезъ $b, g, g_{,}$ и пр. проведемъ прямыя gm, $g_{,}m_{,}$ и пр. параллельныя къ ax, и сдѣлаемъ $be=$ Нѣтъ надобности что бы промежутки ag, gg и пр. были равны; напротивъ того, кажется выгоднѣе сблизить между собою

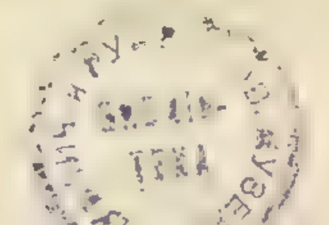
точки $g, g_{,}$ и пр. тамъ, гдѣ касательная кривой дѣлаетъ малый уголъ съ ax. Потомъ опишемъ произвольнымъ радіусомъ кругъ $FAHK_{n}J_{n}$ и отрѣжемъ, отъ какой либо точки A на обводѣ его, разстоянія $AF = AH = b$, $AJ = AK = ag$, $AJ_{,} = AK_{,} = ag_{,}$ и пр. Соединивъ точки F и H, J и K, $J_{,}$ и $K_{,}$ и пр. прямыми, возьмемъ $AE = a$, примемъ на FH произвольную точку C, сдѣлаемъ $CB = \frac{CE}{n}$ и проведемъ AB. Чрезъ точки $G, G_{,}$ и пр. проведемъ прямыя CM, $CM_{,}$ и пр. и сдѣлаемъ $gm_{,} = AM$, $g_{,}m_{,} = AM_{,}$ и пр.; то точки m, $m_{,}$ и пр. будутъ лежать на обводѣ прогрессики, почему остается только соединить ихъ безпрерывною кривою.

'9.

Иногда экспонентъ n неизвѣстенъ, а вмѣсто его дана другая пара координатъ x и y (считая a и b первою парою), или, другими словами, даны кромѣ вершины и положенія оси, еще двѣ точки на обводѣ кривой. Въ такомъ случаѣ стоитъ только опредѣлить n, для сысканія котораго изъ уравненія прогрессики, считая все кромѣ n извѣстнымъ, получимъ

$$n = \frac{(a-x)y^2}{x(b^2-y^2)}.$$

По этой формулѣ можно легко вычислить n, а потомъ уже поступить по прежнему. Но когда мы намѣрены опредѣлить абциссы черченіемъ, то нѣтъ надобности вычислять n;



ибо показанное строеніе прилагается къ этой задачѣ безъ всякаго измѣненія. Да будутъ e и m данныя точки; опредѣлимъ по прежнему прямыя FH, JK и AE. На сей послѣдней возьмемъ $AM = gm$, проведемъ чрезъ m произвольную линію MC и соединимъ A и G прямою AB. Тогда уже можно, слѣдуя изложеннымъ правиламъ, опредѣлить любое число координатъ (*).

10.

Ежели положимъ, что прямая CG, проходя постоянно чрезъ C, постепенно приметъ положенія CG_1, CB и пр., то она, продолжая обращаться такимъ образомъ, получитъ когда нибудь положеніе CD, параллельное къ AE. Тогда абцисса прогрессики безконечна; слѣдовательно, проведя DL параллельно къ BF и принимая $ad = AL$, прямая dz, проведенная параллельно ax, будетъ одна изъ азимитотъ соотвѣтствующихъ безконечной абциссѣ. Ординатамъ же превышающимъ величину AL, соотвѣтствуютъ

(*) Здѣсь считаю нужнымъ замѣтить, что находящееся въ сочиненіи Г. Попова стр. 11, разсужденіе для рѣшенія той же задачи основано на ложной пропорціи

$$FP : FC = gd : gc$$ (см. чертежи 6 и 7 книги Г. Попова).

Вмѣсто чего слѣдовало бы опредѣлить точку P согласно пропорціи

$$BP : BC = bd^2 : bc^2.$$

То же самое разумѣется и о другой данной точкѣ.

отрицательныя абциссы, которыя впрочемъ сыщутся таким же образомъ какъ положительныя. Да будетъ напр. $y=ag_n$. Сдѣлаемъ $AJ_n=AK_n=ag_n$, проведемъ J_nK_n и G_nM_n и возьмемъ $g_nm_n=AM_n$, то точка m_n будетъ лежать на обводѣ кривой. Наконецъ, когда ординаты сдѣлаются безконечными, то прямая CG приметъ положеніе CN параллельное къ AG_n; слѣдовательно, взявъ $an=AN$, прямая on, проведенная параллельно къ ay, будетъ третія азимптота.

Когда требуется сыскать у многихъ кривыхъ абциссы, соотвѣтствующія тѣмъ же ординатамъ ag, $ag_{\prime}$ и пр., то для этого можетъ служить также линія AG_n съ принадлежащими къ ней прямыми CG, $CG_{\prime}$ и пр. Сыщемъ на пр. абциссы для другой прогрессики, въ коей a, b и n получаютъ величины a', b' и n'. Возьмемъ $AF'=AH'=b'$, проведемъ $F'H'$, CA и CB', и сдѣлаемъ $CE'=n'.CB'$; то прямыя CG, $CG_{\prime}$ и пр. отрѣжутъ на AE' отсѣки пропорціональные абциссамъ новой прогрессики; и потому, чтобы имѣть самыя абциссы, надлежитъ только помѣстить между CA и CE' прямую параллельную къ AE' и равную заданному a'. На тотъ конецъ возьмемъ $AQ=a'$ и проведемъ QP параллельно къ AC, а OP параллельно къ AE'; тогда отсѣки, отрѣзанные на OP прямыми CG, $CG_{\prime}$ и пр. будутъ абциссы соотвѣтствующія ординатамъ ag, $ag_{\prime}$ и пр. прогрессики имѣющей постоянныя a', b' и n'. Когда эта прогрессика

конхоидальна, то E' очевидно падаетъ между B' и C, отъ чего CG, гдѣ бы точка G не находилась по прямой AG_{n}, никогда не сдѣлается параллельною къ прямой OP, но пересѣчетъ ее даже при безконечно великой ординатѣ на положительной сторонѣ абциссъ въ нѣкоторой точкѣ N', коей разстояніе отъ A равно разстоянію азимптоты отъ начала.

Хотя показанное строеніе удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ практическаго способа, однакожъ изъ него не видно, какимъ бы образомъ можно описать прогрессику безпрерывнымъ движеніемъ; почему не излишнимъ считаю прибавить еще нѣчто объ этомъ предметѣ.

11.

Теорема. Да изобразитъ $BB'bD$ (чер. 5) произвольнаго радіуса кругъ, и afm прямоугольный треугольникъ, движущійся по діаметру BD такъ, что сторона af всегда совпадаетъ съ Bx. Ежели при этомъ движеніи прямой уголъ afm и сторона af останутся постоянными, а прочія части треугольника afm, безпрерывно станутъ измѣняться такъ, чтобъ гипотенуза am всегда была параллельна прямой Bb, которая опредѣляется, дѣлая $fb = fC$, то точка m будетъ описывать прогрессику параболическую.

Доказательство. Во первыхъ явствуетъ, что точка A, находящаяся на срединѣ радіуса CD, лежитъ на кривой;

ибо когда f придетъ въ A, то b совпадетъ съ D, слѣдовательно Bb совмѣстится съ BD, а m съ A.—Изъ центра C радіусомъ CA опишемъ кругъ AEN, и проведемъ прямыя Cb, AE и NF; то будетъ $\angle AEN = 90°$ и $CE = Eb$, слѣдовательно $\angle fEC = \angle fEb = 90°$, а fE касательная къ кругу AEN, почему

$$Af : fE = fE : fN$$

$$\text{откуда } Af : fN = fE^2 : fN^2.$$

Также $\angle AEf = \angle fNE$, слѣдовательно $90° - AEf = 90° - fNE$ или $\angle fEF = \angle fFE$, $Ff = fE$ и $Af : fN = fF^2 : fN^2$.

Положимъ теперь $Af = x$, $fm = y$, $BC = CD = AN = e$ и $af = f$; то будетъ $x : x + e = fF^2 : fN^2$.

Но прямыя NF, Bb и am параллельны, слѣдовательно

$$fF : fN = fm : af = y : f,$$

$$\text{откуда } x : x + e = y^2 : f^2.$$

Теперь въ уравненіи прогрессики параболической

$$xy^2 + \frac{a}{n-1} y^2 = \frac{b^2 n}{n-1} x$$

$$\text{положимъ } \frac{a}{n-1} = e \quad \text{и } \frac{b^2 n}{n-1} = f^2,$$

$$\text{то будетъ } (x + e) y^2 = f^2 x,$$

что совершенно согласно съ пропорціею, выведенною изъ геометрическаго строенія, и въ то же время показываетъ, какое отношеніе имѣютъ e и f къ a, b и n. Когда f находится между A и N, то кривая пресѣкается, потому что тогда кругъ

описанный изъ центра f радіусомъ fC не дошелъ бы до круга $Db'B$; єжели же f достигнетъ до точки N, то ордината сдѣлается безконечною, ибо какъ скоро b доходитъ весьма близко къ B, то прямая Bb, дѣлаясь перпендикулярною къ Bf, никогда не пересѣкается съ fm; слѣдовательно NO есть азимптота кривой.

12.

Теорема. Да изобразитъ $Ab'bB$ (чер. 6) кругъ, описанный произвольнымъ радіусомъ, и afm прямоугольный треугольникъ, движущійся по діаметру AB такъ, что сторона af всегда совпадаетъ съ Ax. Ежели при этомъ движеніи прямой уголъ afm и сторона af останутся постоянными, а прочія части станутъ безпрерывно измѣняться такъ, чтобы гипотенуза am всегда была параллельна прямой Bb, то точка m будетъ описывать прогрессику конхоидальную.

Доказательство. Имѣемъ $Af:fB=bf^2:fB^2=fm^2:af^2$. И потому положивъ $Af=x$, $fm=y$, $AB=e$ и $af=f$ будетъ

$$x:e-x=y^2:f^2.$$

Изъ уравненія же прогрессики конхоидальной

$$\frac{a}{1-n}y^2-xy^2=\frac{b^2n}{1-n}x,$$

полагая $\frac{a}{1-n}=e$ и $\frac{b^2n}{1-n}=f^2$,

выходитъ $(e-x)y^2=f^2x$,

что совершенно согласно съ найденною пропорціею. Когда f придетъ въ B, то и b совпадетъ съ этою же точкою, слѣдовательно Bb и am перпендикулярны къ AB, и потому нигдѣ не пересѣкутся съ fm, откуда BJ будетъ азимптота кривой.

13.

По этимъ теоремамъ можно бы устроить инструменты для описанія кривыхъ, нами изслѣдуемыхъ; но они вышли бы, кажется, такъ громоздки и многосложны, что не имѣли бы достаточной точности. Впрочемъ графическіе способы выводящіеся изъ доказанныхъ теоремъ для начертанія прогрессики по даннымъ a, b и n, могутъ быть полезны: они такъ просты, что почти не требуютъ изъясненія.

Когда заданное $n > 1$, то кругъ $Bb'bD$ (чертежъ 5) описанный такъ, чтобы вершина A находилась въ срединѣ радіуса CD равнаго $\frac{a}{n-1}$, послужитъ къ сысканію ординатъ соотвѣтствующихъ какимъ-либо абциссамъ принятымъ по произволу. Возьмемъ на оси абциссъ (Ax) разстояніе Af равно a, проведемъ fm перпендикулярно къ Ax, возьмемъ $fm = b$ и $fb = fC$, соединимъ B съ b, и проведемъ mH параллельно, а GH перпендикулярно къ Bx. Тогда чтобы найти ординату соотвѣтствующую какой-либо другой точкѣ, на пр, f', сдѣлаемъ $f'b' = f'C$ и проведемъ BH'; то GH' будетъ ордината соотвѣтствующая точкѣ f'. Нашедши

такимъ образомъ достаточное число точекъ обвода, оста-
ся только соединить ихъ безпрерывною кривою.

Когда же заданное $n<1$, то принявъ вершину въ A,
ось по направленію Ax (чертежъ 6), опишемъ на діа-
трѣ AB, равномъ $\frac{a}{1-n}$, кругъ $Abb'B$, возьмемъ $Af=a$, пр-
ведемъ fm перпендикулярно къ Ax, положимъ $fm=b$, с-
единимъ B съ b, и проведемъ mH параллельно, а GH пер-
пендикулярно къ Ax. Тогда чтобы найти ординату, с-
отвѣтствующую какой-либо другой точкѣ f', сдѣлае-
$af'm'=90°$ и соединимъ B съ b'; то GH' равно буд-
ординатѣ въ f'. Получивши такимъ образомъ достаточн-
число ординатъ, можно перенесть ихъ и на другую ст-
рону оси Ax, буде то потребуется.

14.

Квадратура прогрессики параболической.

Назвавъ S площадь ANO (чертежъ 1) отрѣзанную о-
динатою y, имѣемъ по извѣстной формулѣ для квадрату-
кривыхъ

$$S=\int_{0}^{y} y\,dx.$$

Чтобы произвесть эту интеграцію, обратимся къ фо-
мулѣ

$$x=\frac{ay^2}{b^2n-(n-1)y^2}$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя на $n-1$, положимъ

$$\frac{a}{n-1}=e \text{ и } \frac{b^2 n}{n-1}=f^2;$$

тогда формула приметъ простѣйшій видъ

$$x=\frac{ey^2}{f^2-y^2}.$$

Дифференцiируя это уравненіе найдется

$$dx=\frac{2ef^2y\,dy}{(f^2-y^2)^2} \text{ и } y\,dx=\frac{2ef^2y^2dy}{(f^2-y^2)^2}.$$

Имѣемъ же вообще

$$\int\frac{y^n dy}{(f^2-y^2)^m}=\frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{y^{n-1}}{(f^2-y^2)^{m-1}}-\frac{n-1}{2(m-1)}\cdot\int\frac{y^{n-2}\,dy}{(f^2-y^2)^{m-1}}$$

Полагая въ этомъ выраженіи $m=n=2$, и умножая обѣ части его на $2\,ef^2$, находимъ

$$\int y\,dx=\frac{ef^2y}{f^2-y^2}-ef\int\frac{f\,dy}{f^2-y^2}$$

Введемъ теперь уголъ φ употребленный уже въ (6), и опредѣляющiйся по формулѣ

$$\cos\varphi=\frac{y}{f}.$$

Это конечно позволительно только, когда рѣчь идетъ о той вѣтви кривой, гдѣ $y<f$: но какъ остальныя вѣтви, сколько я судить могу, не обѣщаютъ практической пользы, то мы ограничимся распространеніемъ интеграловъ на первую.—Введемъ еще вспомогательное количество ν, опредѣляющееся по формулѣ

$$\nu = \frac{1}{\sin^2\varphi}.$$

Не трудно увѣриться, что это количество есть то самое которое прежде означалось ν, лишь бы x и y были вставлены вмѣсто α и β въ формулы (3)

$\frac{\alpha}{\nu-1}=\frac{a}{n-1}$ и $\frac{\beta^2\nu}{\nu-1}=\frac{b^2n}{n-1}$; ибо изъ формулы $\nu=\frac{1}{\sin^2\varphi}$ выводится $\nu-1=\cot^2\varphi$ и $\frac{\nu}{\nu-1}=\frac{1}{\cos^2\varphi}=\frac{f^2}{y^2}=\frac{b^2n}{y^2(n-1)}$.

Слѣдовательно количество, которое мы будемъ впредь означать ν, есть экспонентъ, соотвѣтствующій координатамъ x и y.

Выражая теперь части интеграла посредствомъ φ и ν, находимъ.

$$\frac{ef^2}{f^2-y^2}=\frac{\nu x}{\nu-1} \qquad ef=\frac{xy}{(\nu-1)\cos\varphi} \qquad \text{и } \frac{fdy}{f^2-y^2}=-\frac{d\varphi}{\sin\varphi}$$

Но $d(\log.^{(*)} \cot.\frac{\varphi}{2})=-\frac{d\varphi}{\sin\varphi}$, слѣдовательно $\int\frac{fdy}{f^2-y^2}=\log.\cot\frac{\varphi}{2}$.

Вставя эти величины въ выраженіе квадратуры прогрессики, выйдетъ

$$\int ydx=\frac{\nu xy}{(\nu-1)}-\frac{xy\log.\cot\frac{\varphi}{2}}{(\nu-1)\cos\varphi}$$

(*) Слово $log.$ означаетъ натуральный логариѳмъ, который получается, умножая Бригговый логариѳмъ (означаемый во всѣхъ нижеслѣдующихъ вычисленіяхъ L) на $log.$ 10.

Полагая теперь $y=o$, формула дѣлается $=o$; слѣдовательно она заключаетъ уже въ себѣ полное выраженіе площади ANO, почему

$$S=xy\left(\frac{\nu}{\nu-1}-\frac{log.\,cot\frac{\varphi}{2}}{(\nu-1)\cos\varphi}\right)$$

Назовемъ теперь S' площадь AxP отрѣзанную ординатою b, и φ' величину угла φ, соотвѣтствующую положенію $y=b$. Тогда вспомнивъ что x и ν принимаютъ для этого положенія величины a и n, получимъ

$$S'=ab\left(\frac{n}{n-1}-\frac{log.cot.\frac{\varphi'}{2}}{(n-1)\cos.\varphi'}\right)$$

15.

Вычисленіе S и S' по этимъ формуламъ не имѣетъ никакого затрудненія, когда даны a, b, n и y. Впрочемъ оно можетъ быть еще весьма облегчено посредствомъ особой таблицы. Въ самой вещи, полагая

$$\frac{\nu}{\nu-1}-\frac{log.\ cot.\frac{\varphi}{2}}{(\nu-1)cos\varphi}=s \quad \text{и} \quad \frac{n}{n-1}-\frac{log.cot.\frac{\varphi'}{2}}{(n-1)cos\varphi'}=s',$$

легко увѣриться, что s есть функція одного количества ν, а s' та же функція количества n; слѣдовательно логариѳмы s' могутъ быть приведены въ таблицу, имѣющую аргументомъ логариѳмъ n. Такимъ образомъ устроена вторая половина таблицы, помѣщенной въ концѣ сей статьи.

Пріискавъ въ ней логарифмъ s' имѣемъ просто

$$S' = ab s'.$$

А чтобы найти S, надлежитъ прежде сыскать величину ν, соотвѣтствующую данному y. Къ тому могутъ служить формулы

$$e = \frac{a}{n-1} \quad f = b\sqrt{\frac{n}{n-1}} \quad \cos\varphi = \frac{y}{f} \quad \nu = \frac{1}{\sin^2\varphi}$$

Разумѣется, что достаточно сыскать одни логарифмы количествъ e, f и ν; потому что числительныя величины ихъ въ вычисленіи не нужны. Нашедши логарифмъ ν, возьмемъ изъ таблицы логарифмъ s, ему соотвѣтствующій: тогда будетъ (6)

$$S = esy\,(\nu - 1).$$

Вычислимъ теперь по этимъ формуламъ примѣры, находящіеся въ сочиненіи Г. Попова стр. 24. Въ первомъ изъ нихъ требуется сыскать S' по даннымъ

$a = 25{,}85$ . . . . $La = 1.4125$

$b = 85$ . . . . . $Lb = 1.9294$

$Ln = 0.8778$ . . . . $Ls' = 9.9440$

$LS' = 3.2859$ . . . $S' = 1931{,}4$

Во второмъ же требуется по тѣмъ же даннымъ сыскать S, полагая $y = 80$.

Здѣсь $L\,(n-1)$ найдется подъ A, а $L\dfrac{n}{n-1}$ подъ B въ Гаусовыхъ таблицахъ для логарифмовъ суммы и разности противъ логарифма n пріисканнаго подъ C.

$L(n-1)=0.8161$	$\varphi=28°46'$	$Le=0.5964$
$L\frac{n}{n-1}=0.0617$	$L\sin\varphi=9.6823$	$Ly=1.9031$
$L\sqrt{\frac{n}{n-1}}=0.0309$	$L\sin^2\varphi=9.3646$	$Ls=9.9209$
$Lf=1.9603$	$L\nu=0.6354$	$L(\nu-1)=0.5209$
$L\cos\varphi=9.9428$	$S=873.6$(*)	$LS=2.9413$

Разумѣется, что вычисленіе S, и вообще всѣхъ формулъ, въ кои входятъ логарифмы или дуги круга, не можетъ быть замѣнено геометрическимъ строеніемъ. Но сысканіе ν по чертежу весьма легко; въ самой вещи, стоитъ только взглянуть на чертежъ 3, чтобы понять что

$$\frac{CM}{CG}=\nu, \text{ когда } AB : AG=b^2 : y^2.$$

Но главная польза таблицы *для* Ls состоитъ въ рѣшеніи обратнаго вопроса, то есть въ сысканіи n по даннымъ a, b и S'. Ибо этотъ вопросъ безъ таблицы не могъ бы быть рѣшенъ иначе какъ по приближенію; съ помощію же таблицы онъ рѣшается также легко какъ S' сыскивается по даннымъ a, b и n: а именно вычисливъ Ls' по формулѣ

$$\frac{S'}{ab}=s'$$

возьмемъ изъ таблицы логарифмъ n соотвѣтствующій Ls'.

(*) Г. Поповъ находитъ 888.429, потому что онъ, стран. 25 стро. 6, полагаетъ $ady^2=614096$, между тѣмъ какъ оно $=603856$.— Исправя эту ошибку выйдетъ у Г. Попова то же что у меня.

Вычисляя такимъ образомъ примѣръ, помѣщенный въ со-чиненіи Г. Попова стр. 43, находимъ

$$S' = 2363 \ldots\ldots LS' = 3.3734$$

$$a = 26{,}5 \qquad Lab = 3.4232$$

$$b = 100 \qquad Ls' = 9.9502 \;..\; Ln = 0.957 \;..\; n = 9.0$$

Когда $n = 1$, то s' не можетъ быть вычислено по формул

$$s' = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\log.\ \cot.\ \frac{\varphi'}{2}}{(n-1)\cos.\ \varphi'}.$$

Но извѣстно, что въ такомъ случаѣ прогрессика дѣ-лается коническою параболою, а потому $s' = \frac{2}{3}$.

16.

Моментъ прогрессики параболической въ разсужденіи ос-ординатъ.

Означивъ M моментъ площади ANO (чер. 1) въ разсуж-деніи QR, будетъ по извѣстнымъ правиламъ Механики

$$M = \int_0^y xy\,dx.$$

Полагая согласно съ (14)

$$\frac{a}{n-1} = e \quad \text{и} \quad \frac{b^2 n}{n-1} = f^2$$

выходитъ $xy\,dx = \dfrac{2e^2 f^2 y^4 dy}{(f^2 - y^2)^3}$ (*)

(*) Всѣ члены выраженія, помѣщеннаго въ сочиненіи Г. Попова стран. 45 въ послѣ-ней строкѣ, приведемъ къ общему знаменателю, потомъ сложимъ ихъ и совр-нимъ; тогда выйдетъ

Принявъ же въ общемъ выраженіи

$$\int\frac{y^n dy}{(f^2-y^2)^m}=\frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{y^{n-1}}{(f^2-y^2)^{m-1}}-\frac{n-1}{2(m-1)}\int\frac{y^{n-2}dy}{(f^2-y^2)^{m-1}}$$

$m=3, n=4$, и умноживъ обѣ части на $2e^2f^2$, получимъ

$$\int xy\,dx=\frac{e^2f^2y^3}{2(f^2-y^2)^2}-\tfrac{3}{4}e\int\frac{2ef^2dy}{(f^2-y^2)^2}$$

Но по (14) имѣемъ

$$\frac{ef^2y^2}{(f^2-y^2)^2}=vx \text{ и } \int\frac{2ef^2dy}{(f^2-y^2)^2}=S$$

слѣдовательно $\int xy\,dx=\frac{1}{2}evxy-\frac{3}{4}eS$

Поелику эта формула дѣлается $=o$, когда $y=o$, то она содержитъ полное выраженіе момента площади ANO, по чему

$$M=\tfrac{1}{2}evxy-\tfrac{3}{4}eS$$

Назвавъ же M' моментъ площади AxP, соотвѣтствующій величинѣ $y=b$, получимъ

$$dS=\frac{2\,ef^2y^2dy}{(f^2-y^2)^2},$$

что уже можно было предвидѣть безъ того, потому что

$$dS=ydx.$$

Если бы Г. Поповъ не упустилъ изъ виду этого сокращенія, то всѣ его выводы для сысканія моментовъ, которые необыкновенно многосложны, сдѣлались бы весьма простыми. Считаю однако нужнымъ замѣтить, что въ знаменателѣ втораго члена упомянутаго выраженія должно читать f^2-y^2 вмѣсто f^2+y^2

$$M'=\tfrac{1}{2}aben-\tfrac{3}{4}eS'$$

Да будетъ теперь g разстояніе центра тяжести площа-ди ANO отъ QR, и g' то же для площади AxP; то имѣемъ

$M=gS$ и $M'=g'S'$, слѣдовательно

$$g=\frac{ev}{2s}-\tfrac{3}{4}e \qquad g'=\frac{en}{2s'}-\tfrac{3}{4}e.$$

Формулы эти дѣлаются безполезными когда $n=1$.— И извѣстно безъ того, что въ такомъ случаѣ

$$M=\tfrac{3}{5}\,xS \qquad M'=\tfrac{3}{5}\,aS' \qquad g=\tfrac{3}{5}\,x \qquad g'=\tfrac{3}{5}a.$$

Вычисляя g и g' по даннымъ въ (14) выходитъ

$L\frac{e}{2}=0.2954$	$e=3.948$	$L\frac{e}{2}=0.2954$	
$Ln=0.8778$		$Lv=0.6354$	
(*) $ls'=0.0560$	$\frac{3}{4}e=2.961$	$ls=0.0791$	$\frac{3}{4}e=2.961$
1.2292	.... 16.949	1.0099	.... 10.227
	$g'=13.988$		$g=7.266$

17.

Моментъ прогрессики параболической въ разсужденіи оси абциссъ.

Проведя въ площади ANO (чертежъ 1) двѣ ординаты отстоящія на безконечно малое разстояніе dx, отрѣжется параллелограмъ, коего моментъ въ разсужденіи оси Bx равенъ $\frac{y^2}{2}\,dx$; слѣдовательно означивъ N моментъ пло-

(*) Буква l означаетъ дополненіе Бригговаго логарифма.

щади ANO въ разсужденіи оси Bx, имѣемъ

$$N=\int_0^y \frac{y^2}{2}\,dx.$$

$$\text{Но } \frac{y^2}{2}dx=\frac{ef^2y^3dy}{(f^2-y^2)^2};$$

и потому полагая въ общемъ выраженіи

$$\int\frac{y^ndy}{(f^2-y^2)^m}=\frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{y^{n-1}}{(f^2-y^2)^{m-1}}-\frac{n-1}{2(m-1)}\int\frac{y^{n-2}dy}{(f^2-y^2)^{m-1}}$$

$m=2, n=3$, и умножая все на ef^2, выходитъ

$$\int\frac{y^2}{2}dx=\frac{ef^2y^2}{2(f^2-y^2)}-ef^2\int\frac{ydy}{f^2-y^2}=\frac{e}{2}\left(\frac{f^2y^2}{f^2-y^2}-f^2\int\frac{2ydy}{f^2-y^2}\right)$$

Но поелику (14) $v=\frac{f^2}{f^2-y^2}$, то выходитъ $\frac{2ydy}{f^2-y^2}=\frac{dv}{v}$,

$$\text{слѣдовательно } \int\frac{2y\,dy}{f^2-y^2}=log.v$$

$$\text{и } \int\frac{y^2}{2}dx=\frac{e}{2}\left(vy^2-f^2\,log.v\right)$$

Эта формула дѣлается$=o$, когда $y=o$; слѣдовательно она содержитъ полное выраженіе момента ANO; и потому вспомнивъ что

$$e=\frac{x}{v-1} \text{ и } f^2=\frac{vy^2}{v-1}$$

выйдетъ
$$N=\frac{vxy^2}{2(v-1)}\left(1-\frac{log.v}{v-1}\right)$$

Да будетъ теперь N' моментъ площади AxP въ разсужденіи оси же Bx; то получимъ

$$N'=\frac{ab^2n}{2(n-1)}\left(1-\frac{log.n}{n-1}\right)$$

Наконецъ назовемъ h разстояніе центра тяжести площади ANO отъ Bx, а h' то же для площади AxP; то будетъ $N=hS$ и $N'=h'S'$, слѣдовательно

$$h=\frac{\nu y}{2s(\nu-1)}\left(1-\frac{log.\nu}{\nu-1}\right) \text{ и } h'=\frac{bn}{2s'(n-1)}\left(1-\frac{log.n}{n-1}\right)$$

Формулы эти дѣлаются безполезными когда $n=1$. Но въ такомъ случаѣ имѣемъ $N=\frac{3}{8}Sy$ $N'=\frac{3}{8}Sb$ $h=\frac{5}{8}y$ $h'=\frac{5}{8}b$

Вычислимъ теперь h и h' по даннымъ въ (14).

$L\frac{n}{n-1}=$	0.0617	$L\frac{\nu}{\nu-1}=$	0.1144
$Lb=$	1.9294	$Ly=$	1.9031
$l2s'=$	9.7550	$l2s=$	9.7781
	1.7461 .. 55.73		1.7956 .. 62.46
$LLn=$	9.9434	$LL\nu=$	9.8031
$Llog\,10=$	0.3622	$Llog\,10=$	0.3622
$l(n-1)=$	9.1839	$l(\nu-1)=$	9.4791
	1.2356 .. 17.20		1.4400 ... 27.54
	$h'=38.53$		$h=34.92$

Изъ формулъ для g' и h' явствуетъ, что первое зависитъ только отъ a и n, а послѣднее только отъ b и n.

18.

Квадратура прогрессики конхоидальной.

Раздѣливъ числителя и знаменателя формулы

$$x=\frac{ay^2}{b^2n+(1-n)y^2}$$

на $1-n$, положимъ $\frac{a}{1-n}=e$ и $\frac{b^2n}{1-n}=f^2$;

тогда она приметъ видъ

$$x=\frac{ey^2}{f^2+y^2},$$

откуда $dx=\frac{2ef^2ydy}{(f^2+y^2)^2}$ и $ydx=\frac{2ef^2y^2dy}{(f^2+y^2)^2}$.

Имѣемъ же вообще

$$\int\frac{y^n dy}{(f^2+y^2)^m}=\frac{n-1}{2(m-1)}\int\frac{y^{n-2}dy}{(f^2+y^2)^{m-1}}-\frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{y^{n-1}}{(f^2+y^2)^{m-1}}$$

Полагая въ этомъ выраженіи $m=n=2$, и умножая все на $2ef^2$ выходитъ

$$\int ydx=ef\int\frac{fdy}{f^2+y^2}-\frac{ef^2y}{f^2+y^2}.$$

Введя теперь уголъ ψ (6) и экспонентъ ν (3) опредѣляющіеся по формуламъ

$$\frac{f}{y}=\cot\psi \quad \nu=\cos^2\psi$$

выйдетъ $ef=\frac{xy\cot\psi}{1-\nu}$ и $\frac{fdy}{f^2+y^2}=d\psi$,

слѣдовательно $\int\frac{fdy}{f^2+y^2}=\psi$ и $\frac{ef^2}{f^2+y^2}=\frac{\nu x}{1-\nu}$.

Вставя эти величины, получимъ

$$\int y\,dx = \frac{xy}{1-\nu}\left(\psi cot.\psi - \nu\right).$$

Поелику эта формула для $y=o$ дѣлается также $=o$, то она содержитъ полное выраженіе площади ANO (чер. 2), почему

$$S=\frac{xy}{1-\nu}\left(\psi cot.\psi-\nu\right).$$

А чтобы вывести выраженіе для S', положимъ $y=b$, и назовемъ величину ψ, соотвѣтствующую этому положенію, ψ'; вспомнивъ при томъ, что x и ν примутъ величины a и n, найдется

$$S'=\frac{ab}{1-n}\left(\psi'.cot\psi'-n\right).$$

Первая половина таблицы помѣщенной въ концѣ статьи, простирающаяся отъ $Ln=8.8$ до $Ln=0.0$, даетъ логариѳмы количества $\frac{\psi' \, ct \, \psi'-n}{1-n}$, которое означимъ s'. Пріискавъ въ этой таблицѣ Ls', имѣемъ просто

$$S'=ab\,s'.$$

Но когда требуется сыскать S для заданной ординаты, то надлежитъ вычислить во первыхъ ν, къ чему послужатъ формулы:

$$e=\frac{a}{1-n} \qquad f=b\sqrt{\frac{n}{1-n}} \qquad cot.\psi=\frac{f}{y} \qquad \nu=cos^2\psi$$

Тогда уже имѣемъ (6), положивъ $\frac{\psi\, ct.\psi-\nu}{1-\nu}=s$,

$$S=esy(1-\nu),$$

гдѣ Ls находится въ таблицѣ противъ $L\nu$.

Для повѣрки этихъ формулъ вычислимъ примѣры, помѣщенные въ сочиненіи Г. Попова стр. 34. Въ первомъ изъ нихъ ищется S' по даннымъ $a=19{,}9 \ldots\ldots La=1.2989$

$$b=95{,}2 \ldots\ldots Lb=1.9786$$

$$Ln=9.7174 \ldots\ Ls'=9.7611$$

$$S'=1093 \qquad LS'=3.0386$$

Во второмъ же ищется S по тѣмъ же даннымъ, полагая $y=94$.

$n=0{,}5216 \ldots\ Ln=9.7174 \qquad \psi=43°23{,}8 \qquad Le=1.6191$

$1-n=0{,}4784.\ L(1-n)=9.6798 \qquad L(1-\nu)=9.6739$

$L\dfrac{n}{1-n}=0.0376 \qquad L\cos\psi=9.8613 \qquad Ly=1.9731$

$L\sqrt{\dfrac{n}{1-n}}=0.0188 \qquad L\nu=9.7226 \ldots\ Ls=9.7623$

$Lf=1.9974 \qquad LS=3.0284$

$Lcot.\psi=0.0243 \qquad S=1067{,}6$

19.

Моментъ прогрессики конхоидальной въ разсужденіи оси ординатъ.

Для момента площади ANO (чертежъ 2) въ разсужденіи оси QR, который означимъ M, имѣемъ

$$M=\int_{y_0}^{y} xy\,dx.$$

Употребляя же означеніе

$$\frac{a}{1-n}=e \quad \text{и} \quad \frac{b^2 n}{1-n}=f^2$$

выходитъ

$$xy\partial x=\frac{2e^2 f^2 y^4 dy}{(f^2+y^2)^3}.$$

Чтобы интегрировать эту формулу, положимъ въ общем выраженіи

$$\int\frac{y^n dy}{(f^2+y^2)^m}=\frac{n-1}{2(m-1)}\int\frac{y^{n-2}dy}{(f^2+y^2)^{m-1}}-\frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{y^{n-1}}{(f^2+y^2)^{m-1}}$$

$m=3, n=4$, и умножимъ все на $2e^2 f^2$; тогда выйдетъ

$$\int xy\,dx=\tfrac{3}{4}e\int\frac{2ef^2y^2dy}{(f^2+y^2)^2}-\frac{e^2f^2y^3}{2(f^2+y^2)^2}$$

Но,
$$\int\frac{2ef^2y^2\,dy}{(f^2+y^2)^2}=S \quad \text{и} \quad \frac{ef^2y^2}{(f^2+y^2)^2}=vx$$

$$\text{слѣдовательно} \int xy\,dx=\tfrac{3}{4}eS-\tfrac{1}{2}ev\,xy$$

Эта формула, уничтожаясь для $y=o$, содержитъ полное выраженіе момента площади ANO, откуда

$$M=\tfrac{3}{4}eS-\tfrac{1}{2}ev\,xy \qquad M'=\tfrac{3}{4}eS'-\tfrac{1}{2}\,en\,ab$$

$$g=\tfrac{3}{4}e-\frac{ev}{2s} \qquad g'=\tfrac{3}{4}e-\frac{en}{2s'}$$

По этимъ формуламъ выходитъ для прогрессики, имѣющей центръ тяжести на томъ же разстояніи отъ QR, на которомъ онъ находится у треугольника имѣющаго высоту a, а основаніе въ b, $n=0{,}13518$.

Для примѣра вычислимъ g и g' по даннымъ въ (18).

$L\frac{e}{2} = 1.3181 \quad e = 41,6$ | $L\frac{e}{2} = 1.3181$
$L\nu = 9.7226$ | $Ln = 9.7174$
$ls = 0.2377 \quad \frac{3}{4}e = 31,2$ | $ls' = 0.2389 \quad \frac{3}{4}e = 31,2$
$1.2784 \ldots 18,98$ | $1.2744 \ldots 18,81$
$g = 12,22$ | $g' = 12,39$

20.

Моментъ прогрессики конхоидальной въ разсужденіи оси абциссъ.

Называя N моментъ площади ANO въ разсужденіи оси Ax, будетъ

$$N = \int_0^y \frac{y^2}{2} dx.$$

Имѣемъ же

$$\frac{y^2}{2} dx = \frac{ef^2 y^3 dy}{(f^2 + y^2)^2}.$$

Чтобы интегрировать эту формулу, положимъ въ общемъ выраженіи $m=2$, $n=3$, и умножимъ все на cf^2; тогда выйдетъ

$$\int \frac{y^2}{2} dx = ef^2 \int \frac{y dy}{f^2 + y^2} - \frac{ef^2 y^2}{2(f^2 + y^2)} = \frac{ef^2}{2} \left(\int \frac{2y dy}{f^2 + y^2} - \frac{y^2}{f^2 + y^2} \right).$$

Поелику же (18) $\nu = \cos^2 \psi = \frac{f^2}{f^2 + y^2}$, то выходитъ

$$\frac{2y dy}{f^2 + y^2} = -\frac{d\nu}{\nu}, \text{ откуда } \int \frac{2y\, dy}{f^2 + y^2} = \log. \frac{1}{\nu}.$$

Вставивъ эту величину, и вспомнивъ что (3)

$$e = \frac{x}{1 - \nu} \text{ и } f^2 = \frac{\nu y^2}{1 - \nu},$$

найдемъ $\int \frac{y^2}{2}dx = \frac{\nu x y^2}{2(1-\nu)}\left(\frac{log\frac{1}{\nu}}{1-\nu} - 1\right)$

Эта формула, уничтожаясь для $y=o$, заключаетъ въ себѣ полное выраженіе момента площади ANO, откуда

$$N = \frac{\nu x y^2}{2(1-\nu)}\left(\frac{log\frac{1}{\nu}}{1-\nu} - 1\right) \qquad N' = \frac{ab^2 n}{2(1-n)}\left(\frac{log\frac{1}{n}}{1-n} - 1\right)$$

$$h = \frac{\nu y}{2s(1-\nu)}\left(\frac{log\frac{1}{\nu}}{1-\nu} - 1\right) \quad \text{и} \quad h' = \frac{bn}{2s'(1-n)}\left(\frac{log\frac{1}{n}}{1-n} - 1\right).$$

Вычислимъ теперь h и h' по даннымъ въ (18).

$L\frac{\nu}{1-\nu}=$	0.0486	$L\frac{1}{\nu}=$	0.2774	$L\frac{n}{1-n}=$	0.0376	$L\frac{1}{n}=$	0.2…
$Ly=$	1.9731			$Lb=$	1.9786		
$l2s=$	9.9367			$l2s'=$	9.9379		
	1.9584		90.88		1.9541		89…
$LL\frac{1}{\nu}=$	9.4431			$LL\frac{1}{n}=$	9.4512		
$Llog\,10=$	0.3622			$Llog\,10=$	0.3622		
$l(1-\nu)=$	0.3261			$l(1-n)=$	0.3202		
	2.0898		122.97		2.0877		122…
			$h=32.09$				$h'=32…$

21.

Судя по вопросу, предложенному въ книгѣ Г. Попо… стр. 66, сочинитель полагаетъ устраивать суда такъ, что… подводная площадь какого-либо шпангоута была рав… произведенію изъ сомножителя, постояннаго для всѣ…

шпангоутовъ, на количество $a-x$, гдѣ x означаетъ абциссу прогрессики, принимая ординатою разстояніе между плоскостями упомянутаго шпангоута и мидель-шпангоута. Для оконечностей грузовой ватерлиніи, гдѣ площади $=0$, должно быть также $a-x=0$, слѣдовательно $x=a$; а какъ этой абциссѣ соотвѣтствуетъ ордината b, то видно, что сія постоянная равна разстоянію оконечности грузовой ватерлиніи отъ плоскости мидель-шпангоута; откуда слѣдуетъ что одна и та же кривая не можетъ соотвѣтствовать носовой и кормовой частямъ судна, когда мидель-шпангоутъ ближе къ носу нежели къ кормѣ, и когда въ то же время требуется, чтобы содержаніе количествъ $a-x$ къ площадямъ шпангоутовъ было то же въ кормовой что въ носовой части. Должно по этому принять двѣ кривыя, назначая постоянной a ту же величину у обѣихъ, и вставляя въ первой вмѣсто b разстояніе носовой оконечности грузовой ватерлиніи отъ плоскости мидель-шпангоута, которое означимъ $b-z$, а у второй разстояніе кормовой оконечности отъ той же плоскости, которое да будетъ $=b+z$. Что же касается до экспонента n, то Г. Поповъ по видимому назначаетъ обѣимъ кривымъ тотъ же, замѣчая при томъ, что для кораблей линейныхъ должно быть $n>1$, а для легкихъ военныхъ судовъ $n<1$.

Теперь возьмемъ на прямой CD отсѣки $BC=b-z$ (чер. 7),

и $BD = b + z$, и поставимъ въ B перпендикуляръ $BA = a$. Потомъ примемъ точку A за вершину, а AB за ось абциссъ, и опишемъ двѣ прогрессики, имѣющія данный экспонентъ n, и такія, чтобы обводъ одной проходилъ чрезъ точку C, а другой чрезъ D; тогда всѣ перпендикуляры, поставленные на CD, какъ напр. BA, EJ и пр. будучи умножены на нѣкоторое постоянное количество, дадутъ площади соотвѣтствующихъ имъ шпангоутовъ въ суднѣ, устроенномъ по мыслямъ Г. Попова; вся же площадь $CAJD$, которую означимъ S, будучи умножена на тоже количество, дастъ водоизмѣщеніе судна. Также легко понять, что разстояніе центра величины подводной части отъ плоскости какого либо шпангоута, будетъ равно разстоянію центра тяжести (K) площади $CAJD$ отъ перпендикуляра, соотвѣтствующаго этому шпангоуту.

22.

Приступимъ теперь къ рѣшенію вопроса, предложеннаго Г. Поповымъ:

Да изобразятъ AC и AJD двѣ прогрессики, имѣющія общую вершину A и туже ось абциссъ AB. Уравненіе первой да будетъ $(n-1)xy^2 + ay^2 = (b-z)^2nx$

а второй $(n-1)xy^2 + ay^2 = (b+z)^2nx$

Означимъ P площадь, включенную между AB $(=a)$ и BC $(=b-z)$; а Q площадь $ABDJ$, находящуюся между AB

BD $(=b+z)$, и положимъ, что даны сумма площадей P и Q, которую означимъ S, и разстояніе $(NK=r)$ центра тяжести (K) площади S отъ перпендикуляра EJ, поставленнаго изъ средины DC; требуется опредѣлить экспонентъ n и разстояніе $(BE=z)$ оси абциссъ отъ даннаго перпендикуляра EJ.

Когда прогрессивки, выражающія площади шпангоутовъ, параболически, то получимъ P и Q, вставя въ формулу для S' (14) послѣдовательно $b-z$ и $b+z$ вмѣсто b. Такимъ образомъ найдемъ

$$P=a(b-z)\left(\frac{n}{n-1}-\frac{\log.\cot.\frac{\varphi'}{2}}{(n-1)\cos\varphi'}\right)$$

$$Q=a(b+z)\left(\frac{n}{n-1}-\frac{\log.\cot.\frac{\varphi'}{2}}{(n-1)\cos\varphi'}\right),\text{ слѣдовательно}$$

$$S=P+Q=2ab\left(\frac{n}{n-1}-\frac{\log.\cot.\frac{\varphi'}{2}}{(n-1)\cos\varphi'}\right),\text{ откуда}$$

$$\frac{S}{2ab}=\frac{n}{n-1}-\frac{\log.\cot.\frac{\varphi'}{2}}{(n-1)\cos\varphi'}=s'.$$

И такъ, чтобы найти n, стоитъ только въ столбцѣ Ls' таблицы помѣщенной въ концѣ статьи, пріискать $L\frac{S}{2ab}$; тогда противъ этого логарифма найдется Ln.

6.

Замѣтимъ теперь, что площадь S, будучи умножена на разстояніе точки K отъ AB, должна дать произведеніе равное моменту площади Q въ разсужденіи оси AB, безъ момента площади P въ разсужденіи той же оси; почему, назвавъ первый моментъ N', а послѣдній N, будетъ

$$S(z-r)=N'-N.$$

N и N' найдутся, вставя въ выраженіе для N' (17) последовательно $b-z$ и $b+z$ вмѣсто b; откуда выйдетъ

$$N=\frac{a(b-z)^2n}{2(n-1)}\left(1-\frac{log.n}{n-1}\right)$$

$$N'=\frac{a(b+z)^2n}{2(n-1)}\left(1-\frac{log.n}{n-1}\right),$$ слѣдовательно

$$S(z-r)=N'-N=\frac{2abzn}{n-1}\left(1-\frac{log.n}{n-1}\right).$$

Изъ этаго уравненія выводится легко

$$\frac{r}{z}=1-\frac{n}{(n-1)s}\left(1-\frac{log.n}{n-1}\right).$$

Нашедши $\frac{r}{z}$ по этой формулѣ, остается только раздѣлить r на $\frac{r}{z}$, чтобы получить z. (*)

(*) Не понимаю, почему Г. Поповъ выдаетъ рѣшеніе свое, которое въ сущности дѣла совершенно согласно съ моимъ, за приближенное. Когда обѣ прогрессіи имѣютъ тотъ же экспонентъ, то наши рѣшенія совершенно точны; когда же разные, то вопросъ неопредѣленъ.

Примѣръ. Да будетъ $a=998,4 \ldots\ldots la=7.0007$

$2b=205,2 \ldots\ldots l2b=7.6878$

$Ln=0.1700 \quad n=1.479 \quad S=146963 \ldots\ldots LS=5.1672$

$l(n-1)=0.3197 \quad L(n-1)=9.6803 \quad r=2,79 \qquad Ls'=9.8557$

$ls'=0.1443$

$0.6340 \ldots\ldots 4.305 \quad Lr=0.4456$

$LLn=9.2304 \qquad L\frac{r}{z}=9.3284$

$Llog10=0.3622 \qquad Lz=1.1172 \ldots\ldots z=13.1$

$l(n-1)=0.3197$

$0.5463 \ldots\ldots 3.518$

$\frac{r}{z}=0.213$

Когда прогрессики, коихъ абциссы, будучи вычитаемы изъ a, даютъ остатки пропорціональные площадямъ шпангоутовъ, принадлежатъ къ конхоидальнымъ, то Ln найдется также въ таблицѣ, полагая

$$\frac{S}{2ab}=s'.$$

Іоменты же N и N' получимъ, вставляя въ выраженіе для N' (20) послѣдовательно $b-z$ и $b+z$ вмѣсто b, откуда выйдетъ

$$N=\frac{a(b-z)^2n}{2(1-n)}\left(\frac{log.\frac{1}{n}}{1-n}-1\right)$$

$$N'=\frac{a(b+z)^2n}{2(1-n)}\left(\frac{log.\frac{1}{n}}{1-n}-1\right),$$ слѣдовательно

$$S\,(z-r)=\frac{2\,ab\,nz}{1-n}\left(\frac{\log.\frac{1}{n}}{1-n}-1\right)\text{, откуда}$$

$$\frac{r}{z}=1-\frac{n}{s'(1-n)}\left(\frac{\log.\frac{1}{n}}{1-n}-1\right)$$

Примѣръ. Да будетъ $a=257{,}76\ \ldots\ la=7.5888$

$Ln=9.8468$ $\quad n=0.7027$ $\quad 2b=94$ $\quad\ldots\ l2b=8.0269$

$l(1-n)=0.5268$ $\quad 1-n=0.2973$ $\quad S=14985$ $\quad LS=4.1757$

$ls'=0.2086$ $\quad L\frac{1}{n}=0.1532$ $\quad r=0{,}55$ $\quad Ls'=9.7914$

$0.5822\ \ldots\ 3.821$ $\quad Lr=9.7404$

$LL\frac{1}{n}=9.1853$ $\quad L\frac{r}{z}=9.4579$

$L\log.10=0.3622$ $\quad Lz=0.2825$ $\quad z=1{,}92$

$l(1-n)=0.5268$

$0.6565\ \ldots\ 4.534$

$\frac{r}{z}=0.287$

Погрѣшности.

Стран. 21 стр. 2 съ низу вмѣсто fC читай $f'C$.

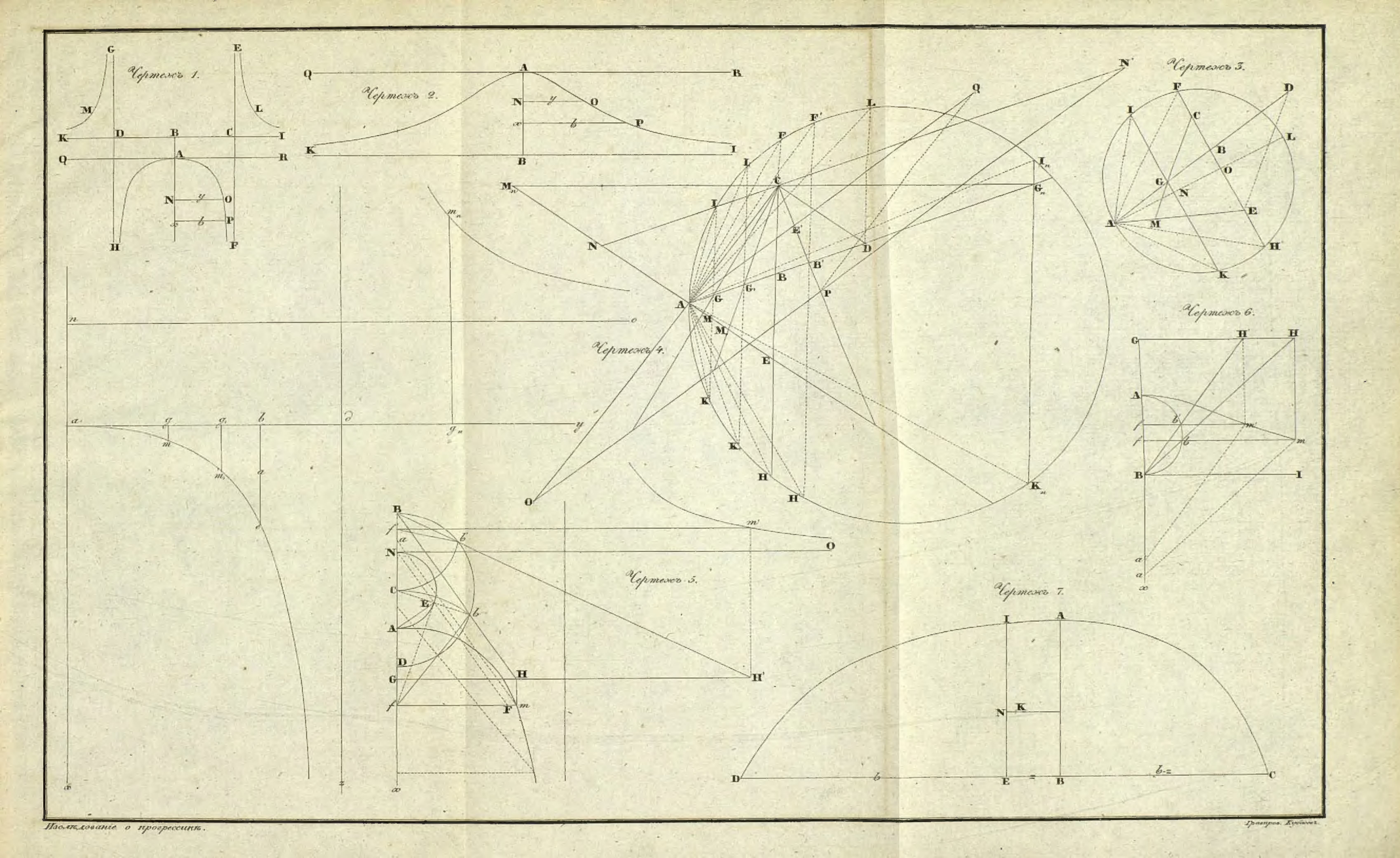
— — 22 — — 5 съ верху — — $Abb'B$ — — $Ab'bB$.

— — 30 — — 9 — — 14 — — 15.

— — 32 — — 10 — — 14 — — 15.

Таблица для сысканія экспонентовъ прогрессии по данной площади.

$n < 1.$									$n > 1.$								
Ln	*Ls'*		*Ln*	*Ls'*		*Ln*	*Ls'*		*Ln*	*Ls'*		*Ln*	*Ls'*		*Ln*	*Ls'*	
8.80	9.4734	37	9.20	9.6134	32	9.60	9.7312	26	0.00	9.8239	20	0.40	9.8917	14	0.80	9.9373	9
8.81	9.4771	37	9.21	9.6166	33	9.61	9.7338	26	0.01	9.8259	20	0.41	9.8931	13	0.81	9.9382	9
8.82	9.4808	37	9.22	9.6199	32	9.62	9.7364	26	0.02	9.8279	19	0.42	9.8944	14	0.82	9.9391	9
8.83	9.4845	38	9.23	9.6231	31	9.63	9.7390	26	0.03	9.8298	20	0.43	9.8958	14	0.83	9.9400	8
8.84	9.4883	36	9.24	9.6262	32	9.64	9.7416	25	0.04	9.8318	19	0.44	9.8972	13	0.84	9.9408	9
8.85	9.4919	37	9.25	9.6294	32	9.65	9.7441	26	0.05	9.8337	19	0.45	9.8985	13	0.85	9.9417	8
8.86	9.4956	37	9.26	9.6326	31	9.66	9.7467	25	0.06	9.8356	19	0.46	9.8998	13	0.86	9.9425	9
8.87	9.4993	37	9.27	9.6357	32	9.67	9.7492	25	0.07	9.8375	19	0.47	9.9011	13	0.87	9.9434	8
8.88	9.5030	36	9.28	9.6389	31	9.68	9.7517	25	0.08	9.8394	19	0.48	9.9024	13	0.88	9.9442	8
8.89	9.5066	36	9.29	9.6420	31	9.69	9.7542	25	0.09	9.8413	18	0.49	9.9037	13	0.89	9.9450	8
8.90	9.5102	37	9.30	9.6451	31	9.70	9.7567	25	0.10	9.8431	19	0.50	9.9050	12	0.90	9.9458	8
8.91	9.5139	36	9.31	9.6482	30	9.71	9.7592	25	0.11	9.8450	18	0.51	9.9062	13	0.91	9.9466	8
8.92	9.5175	36	9.32	9.6512	31	9.72	9.7617	24	0.12	9.8468	18	0.52	9.9075	12	0.92	9.9474	8
8.93	9.5211	36	9.33	9.6543	30	9.73	9.7641	24	0.13	9.8486	18	0.53	9.9087	12	0.93	9.9482	7
8.94	9.5247	35	9.34	9.6573	31	9.74	9.7665	24	0.14	9.8504	17	0.54	9.9099	12	0.94	9.9489	8
8.95	9.5282	36	9.35	9.6604	30	9.75	9.7689	24	0.15	9.8521	18	0.55	9.9111	12	0.95	9.9497	7
8.96	9.5318	35	9.36	9.6634	30	9.76	9.7713	24	0.16	9.8539	18	0.56	9.9123	12	0.96	9.9504	8
8.97	9.5353	36	9.37	9.6664	30	9.77	9.7737	24	0.17	9.8557	17	0.57	9.9135	12	0.97	9.9512	7
8.98	9.5389	35	9.38	9.6694	29	9.78	9.7761	23	0.18	9.8574	17	0.58	9.9147	11	0.98	9.9519	7
8.99	9.5424	35	9.39	9.6723	30	9.79	9.7784	23	0.19	9.8591	17	0.59	9.9158	12	0.99	9.9526	7
9.00	9.5459	35	9.40	9.6753	29	9.80	9.7807	23	0.20	9.8608	17	0.60	9.9170	11	1.00	9.9533	7
9.01	9.5494	35	9.41	9.6782	29	9.81	9.7830	23	0.21	9.8625	16	0.61	9.9181	11	1.01	9.9540	7
9.02	9.5529	35	9.42	9.6811	30	9.82	9.7853	23	0.22	9.8641	17	0.62	9.9192	11	1.02	9.9547	7
9.03	9.5564	34	9.43	9.6841	29	9.83	9.7876	23	0.23	9.8658	16	0.63	9.9203	11	1.03	9.9554	7
9.04	9.5598	35	9.44	9.6870	28	9.84	9.7899	22	0.24	9.8674	17	0.64	9.9214	11	1.04	9.9561	7
9.05	9.5633	34	9.45	9.6898	29	9.85	9.7921	23	0.25	9.8691	16	0.65	9.9225	11	1.05	9.9568	6
9.06	9.5667	34	9.46	9.6927	28	9.86	9.7944	22	0.26	9.8707	16	.66	9.9236	10	1.06	9.9574	7
9.07	9.5701	35	9.47	9.6955	29	9.87	9.7966	22	0.27	9.8723	15	0.67	9.9246	11	1.07	9.9581	6
9.08	9.5736	34	9.48	9.6984	28	9.88	9.7988	21	0.28	9.8738	16	0.68	9.9257	10	1.08	9.9587	6
9.09	9.5770	33	9.49	9.7012	28	9.89	9.8009	22	0.29	9.8754	16	0.69	9.9267	10	1.09	9.9593	6
9.10	9.5803	34	9.50	9.7040	28	9.90	9.8031	22	0.30	9.8770	15	0.70	9.9277	10	1.10	9.9599	7
9.11	9.5837	34	9.51	9.7068	27	9.91	9.8053	21	0.31	9.8785	15	0.71	9.9287	10	1.11	9.9606	6
9.12	9.5871	33	9.52	9.7095	28	9.92	9.8074	21	0.32	9.8800	15	0.72	9.9297	10	1.12	9.9612	6
9.13	9.5904	33	9.53	9.7123	27	9.93	9.8095	21	0.33	9.8815	15	0.73	9.9307	10	1.13	9.9618	6
9.14	9.5937	33	9.54	9.7150	28	9.94	9.8116	21	0.34	9.8830	15	0.74	9.9317	10	1.14	9.9624	5
9.15	9.5970	33	9.55	9.7178	27	9.95	9.8137	21	0.35	9.8845	14	0.75	9.9327	9	1.15	9.9629	6
9.16	9.6003	33	9.56	9.7205	27	9.96	9.8158	20	0.36	9.8859	15	0.76	9.9336	10	1.16	9.9635	6
9.17	9.6036	33	9.57	9.7232	26	9.97	9.8178	21	0.37	9.8874	14	0.77	9.9346	9	1.17	9.9641	5
9.18	9.6069	33	9.58	9.7258	27	9.98	9.8199	20	0.38	9.8888	15	0.78	9.9355	9	1.18	9.9646	6
9.19	9.6102	32	9.59	9.7285	27	9.99	9.8219	20	0.39	9.8903	14	0.79	9.9364	9	1.19	9.9652	5
9.20	9.6134		9.60	9.7312		0.00	9.8239		0.40	9.8917		0.80	9.9373		1.20	9.9657	


Чертежъ 1.
Чертежъ 2.
Чертежъ 3.
Чертежъ 4.
Чертежъ 5.
Чертежъ 6.
Чертежъ 7.

